une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $(]0, \frac{\pi}{2}]) = [\,0\,, +\infty\,[= J$

3°/

a) • g est continue sur $[\,0\,, +\infty\,[$ comme réciproque d'une fonction continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

• f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ , f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $f\ (]0, \frac{\pi}{2}[) =]\,0\,, +\infty\,[$.

• Etudions la dérivabilité de g à droite en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{y \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{y - \frac{\pi}{2}}{f(y)} = \lim_{y \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{1}{\frac{f(y) - f(\frac{\pi}{2})}{y - \frac{\pi}{2}}} = 0$$

car on a : montré précédemment que $\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = -\infty$

donc g est dérivable en 0 et $g'_d(0) = 0$

Conclusion : g est dérivable sur $[\,0\,, +\infty\,[$.

b) Soit $x \in]\,0\,, +\infty\,[$, $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ où $y = g(x)$

$g'(x) = -\sin y \sqrt{\sin(2y)}$

Or $y = g(x)$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{\sin 2y}}{\sin y} \Leftrightarrow \sqrt{\sin 2y} = x \sin y$ donc

$g'(x) = -x \sin^2 y$

On a : $x^2 = \frac{\sin 2y}{\sin^2 y} \Rightarrow x^2 = \frac{2\cos y}{\sin y}$